№ 1. Решите уравнение $|7x^2-11x+3|-x+2=0$.

Решение.

1 способ

$$|7x^2-11x+3| = \begin{cases} 7x^2-11x+3, & x \in \left(-\infty; \frac{11-\sqrt{37}}{14}\right] \cup \left[\frac{11+\sqrt{37}}{14}; +\infty\right) \\ -7x^2+11x-3, & x \in \left(\frac{11-\sqrt{37}}{14}; \frac{11+\sqrt{37}}{14}\right) \end{cases}$$

1) $7x^2-11x+3-x+2=0$, $x \in \left(-\infty; \frac{11-\sqrt{37}}{14}\right] \cup \left[\frac{11+\sqrt{37}}{14}; +\infty\right)$

$7x^2-12x+5=0$

$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-35}}{7} = \frac{6 \pm 1}{7}$; $x_1 = \frac{5}{7}$, $x_2 = 1$

$x_1 \notin \left(-\infty; \frac{11-\sqrt{37}}{14}\right] \cup \left[\frac{11+\sqrt{37}}{14}; +\infty\right)$

$x_2 \notin \left(-\infty; \frac{11-\sqrt{37}}{14}\right] \cup \left[\frac{11+\sqrt{37}}{14}; +\infty\right)$

2) $-7x^2+11x-3-x+2=0$, $x \in \left(\frac{11-\sqrt{37}}{14}; \frac{11+\sqrt{37}}{14}\right)$

$-7x^2+10x-1=0$

$7x^2-10x+1=0$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-7}}{7} = \frac{5 \pm 3\sqrt{2}}{7}$; $x_1 = \frac{5-3\sqrt{2}}{7}$; $x_2 = \frac{5+3\sqrt{2}}{7}$

$x_1 \notin \left(\frac{11-\sqrt{37}}{14}; \frac{11+\sqrt{37}}{14}\right)$; $x_2 \notin \left(\frac{11-\sqrt{37}}{14}; \frac{11+\sqrt{37}}{14}\right)$

$\Rightarrow$ корней нет.

2 способ

Выполним преобразование:

$|7x^2-11x+3| = x-2$

Рассмотрим функции $y_1 = |7x^2-11x+3|$ и $y_2 = x-2$

и построим графики этих функций.

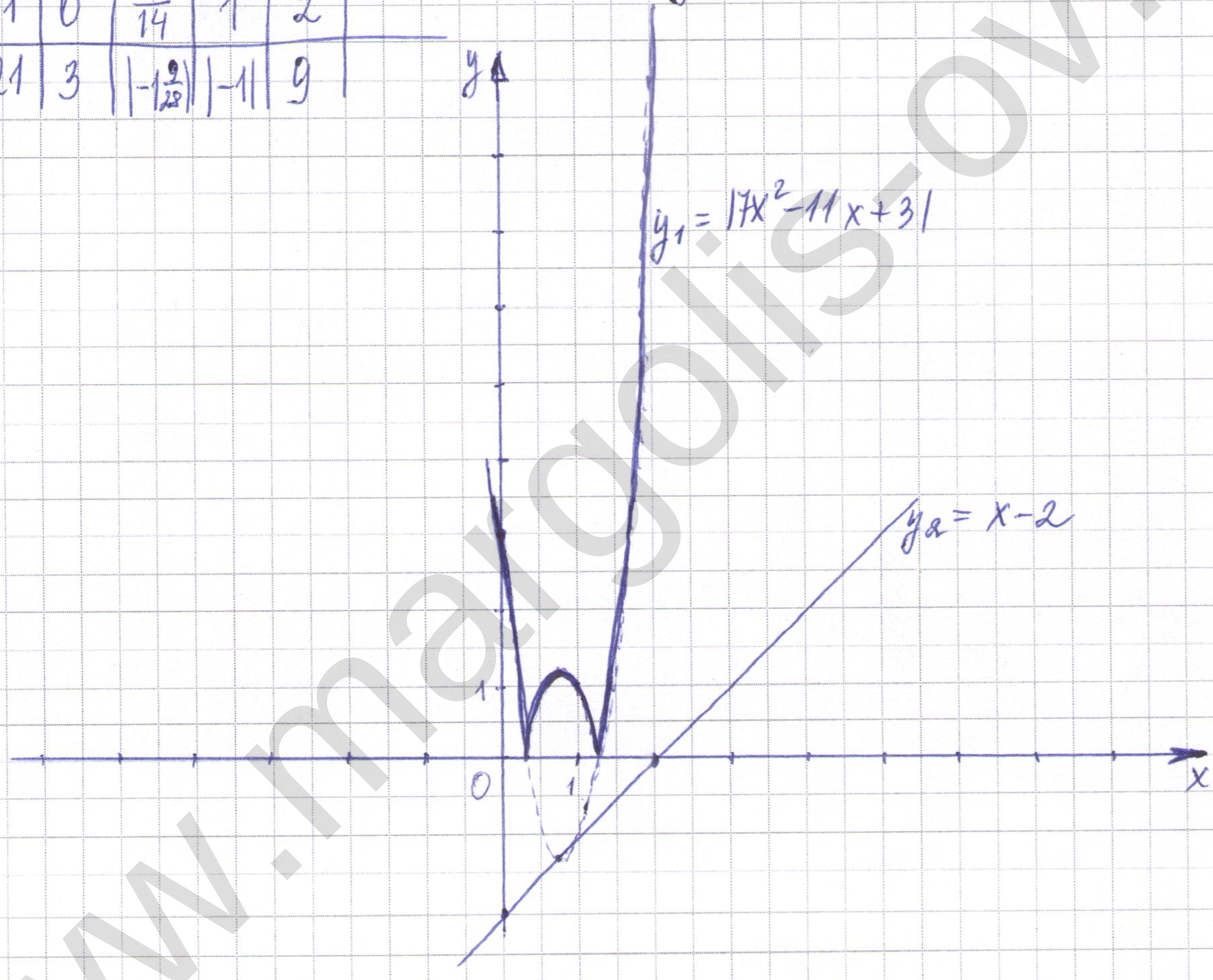
$y_1 = |7x^2 - 11x + 3|$

$y_2 = x - 2$

$x_0 = \frac{11}{14}$; $y_0 = |-1\frac{9}{28}|$

x	0	2
y	-2	0

x	-1	0	$\frac{11}{14}$	1	2
y_1	21	3	$\lvert -1\frac{9}{28}\rvert$	$\lvert -1\rvert$	9



Графики функций y_1 и y_2 не имеют общих точек. Значит, уравнение $|7x^2 - 11x + 3| - x + 2 = 0$ не имеет корней.

Ответ. Корней нет.

№2. Имеются два раствора серной кислоты в воде: первый - 40%-ный, второй - 60%-ный. Эти два раствора смешали, после чего добавили 5 кг чистой воды и получили 20%-ный раствор. Если бы вместо 5 кг чистой воды добавили 5 кг 80%-ного раствора, то получился бы 70%-ный раствор. Сколько было 40%-ного и 60%-ного растворов?

Решение.

	I раствор		II раствор
Концентрация:	40%	+	60%
Масса р-ра:	x кг	5 кг воды	y кг
Масса серной кислоты в растворе	$0{,}4x$ кг	(от серной кислоты)	$0{,}6y$ кг

Масса р-ра: $(x+y+5)$ кг

Масса серной кислоты в растворе: $0{,}2(x+y+5)$ кг

Концентрация: 20%

Если: I раствор + II раствор

5 кг 80%-ного р-ра
($0{,}8 \cdot 5 = 4$ кг серной кислоты)

Масса р-ра: $(x+y+5)$ кг

Масса серной кислоты в растворе: $0{,}7(x+y+5)$ кг

Концентрация 70%

Пусть x кг – масса первого (40%-ного) раствора серной кислоты, а y кг – масса второго (60%-ного) раствора серной кислоты. Тогда масса серной кислоты в первом растворе равна $0{,}4x$ кг, а во втором – $0{,}6y$ кг. Если смешать эти растворы с 5 кг воды, то в новом растворе будет содержаться $(0{,}4x+0{,}6y)$ кг серной кислоты, а если смешать эти растворы с 5 кг 80%-ного раствора серной кислоты, то в новом растворе будет содержаться $(0{,}4x+0{,}6y+4)$ кг серной кислоты. Зная, что после добавления воды получается 20%-ный раствор, а после добавления 80%-ного раствора получается 70%-ный раствор, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}4x+0{,}6y=0{,}2(x+y+5), & \mid \cdot 10 \\ 0{,}4x+0{,}6y+4=0{,}7(x+y+5) & \mid \cdot 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x+6y=2(x+y+5), \\ 4x+6y+40=7(x+y+5) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 2x + 4y = 10, \\ -3x - y = -5 \end{cases} \Big| \cdot 4$$

$$-10x = -10$$

$\underline{x = 1}$; $4y = 10 - 2$; $\underline{y = 2}$

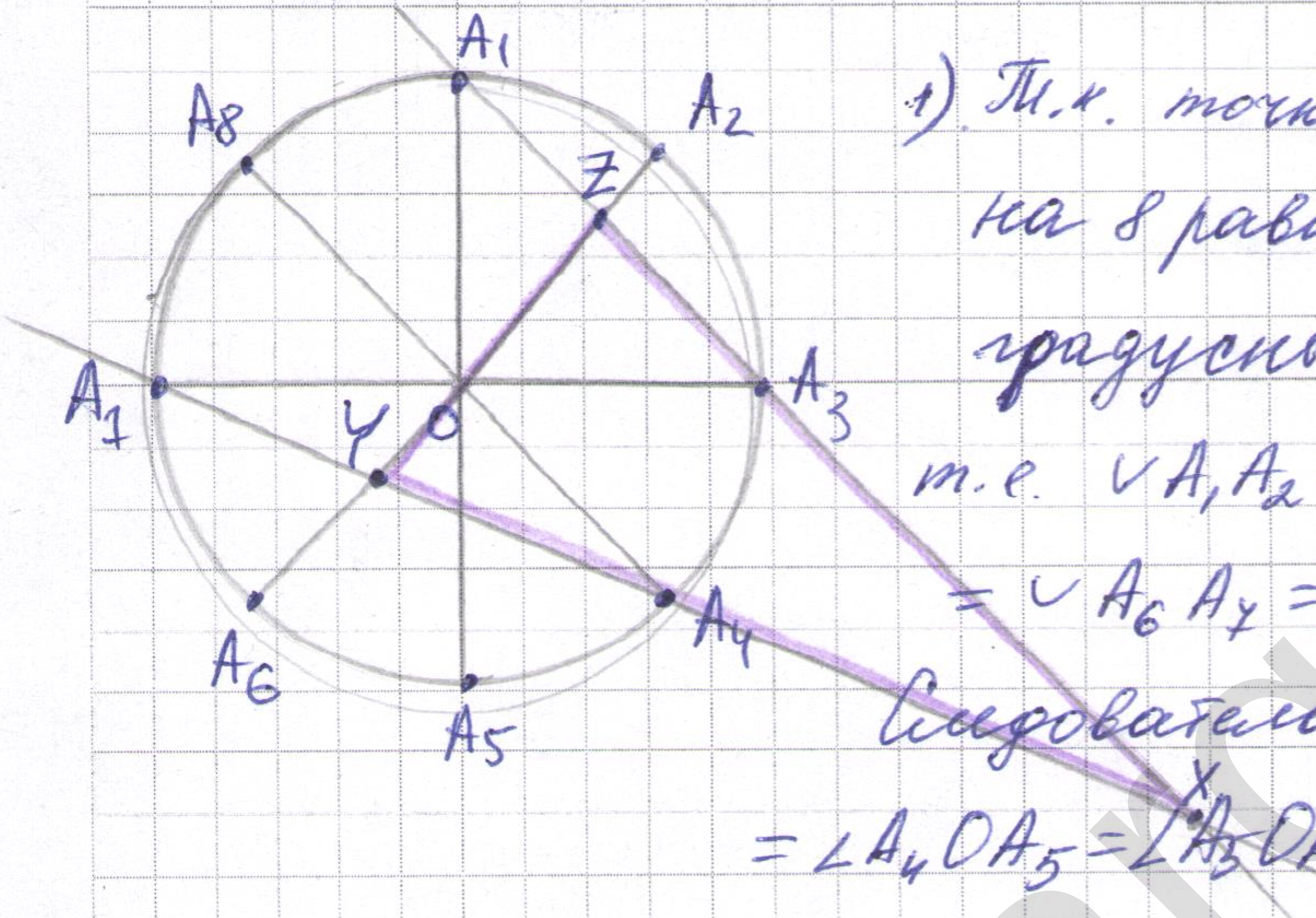
1кг нужно взять 40%-ного раствора серной кислоты

2кг нужно взять 60%-ного раствора серной кислоты.

Ответ: 1кг 40%-ного раствора,
2кг 60%-ного раствора.

№3. Точки $A_1, \ldots, A_8$ делят окружность на 8 равных дуг. Пусть X - точка пересечения прямых A_1A_3 и A_4A_7, Y - точка пересечения прямых A_2A_6 и A_4A_7, Z - точка пересечения прямых A_1A_3 и A_2A_6. Найдите углы треугольника XYZ

Решение.



1) Т.к. точки $A_1, \ldots, A_8$ делят окружность на 8 равных дуг (по условию), то градусные меры этих дуг равны, т.е. $\smile A_1A_2 = \smile A_2A_3 = \smile A_3A_4 = \smile A_4A_5 = \smile A_5A_6 =$
$= \smile A_6A_7 = \smile A_7A_8 = \smile A_8A_1 = 45^\circ$

Следовательно, $\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \angle A_3OA_4 =$
$= \angle A_4OA_5 = \angle A_5OA_6 = \angle A_6OA_7 = \angle A_7OA_8 = \angle A_8OA_1 = 45^\circ$ - как центральные углы, опирающиеся на равные дуги.

2). $\angle A_2OA_6 = \angle A_2OA_3 + \angle A_3OA_4 + \angle A_4OA_5 + \angle A_5OA_6 = 4 \cdot 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow$
$\angle A_2OA_6$ - развернутый, а значит, точки A_2 и A_6 лежат на одной прямой, проходящей через центр окружности (A_2A_6 - диаметр окружности).

3). Рассмотрим $\triangle A_4OY$: а) $\angle A_4OY = \angle A_4OA_6 = \angle A_4OA_5 + \angle A_5OA_6 =$
$= 90^\circ \Rightarrow \triangle A_4OY$ - прямоугольный.

б) $\angle OA_4Y = \angle A_7A_4A_8$, $\angle A_7A_4A_8$ - вписанный, опирается на дугу $\smile A_7A_8 \Rightarrow \angle A_7A_4A_8 = \frac{1}{2} \smile A_7A_8$ (по теореме о градусной мере вписанного угла в окружность).

$\Rightarrow \angle OA_4Y = \angle A_7A_4A_8 = \frac{1}{2}\cdot 45^\circ = 22{,}5^\circ$.

Значит, $\angle A_4YO = 90^\circ - \angle OA_4Y = 90^\circ - 22{,}5^\circ = 67{,}5^\circ$ (по свойству острых углов прямоугольного треугольника).

$\Rightarrow \angle Y$ треугольника XYZ равен $67{,}5^\circ$.

4). Рассмотрим $\triangle A_1OA_3$: а) $OA_1 = OA_3$ — как радиусы одной окружности;

$\Rightarrow \triangle A_1OA_3$ — равнобедренный;

б) $\angle A_1OA_3 = \angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 = 2\cdot 45^\circ = 90^\circ$;

$\Rightarrow \triangle A_1OA_3$ — прямоугольный.

в) т.к. $Z \in OA_2$, OZ — биссектриса $\angle A_1OA_3$, проведенная из вершины равнобедренного треугольника A_1OA_3 к основанию, то $OZ \perp A_1A_3$ (по св-ву биссектрисы равнобедренного треугольника, проведенной из вершины треугольника к основанию). Значит, $\angle A_3ZO = 90^\circ$.

Значит, угол Z треугольника XYZ равен 90°.

5) Т.к. в $\triangle XYZ$ $\angle Z = 90^\circ$, то $\triangle XYZ$ — прямоугольный. Поэтому $\angle X = 90^\circ - \angle Y = 90^\circ - 67{,}5^\circ = 22{,}5^\circ$ (по свойству острых углов прямоугольного треугольника).

Ответ: $22{,}5^\circ$; $67{,}5^\circ$; 90°.

№4 Решите неравенство $\frac{\sqrt{x+5}}{1-x}<1$.

Решение.

Будем искать решения неравенства на множестве $\begin{cases} x \geq -5, \\ x \neq 1 \end{cases}$ $x \in [-5; 1) \cup (1; +\infty)$ (*)

$$\frac{\sqrt{x+5}}{1-x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+5} - 1 + x}{1-x} < 0$$

а) $\sqrt{x+5} - 1 + x = 0$

$\sqrt{x+5} = 1 - x$

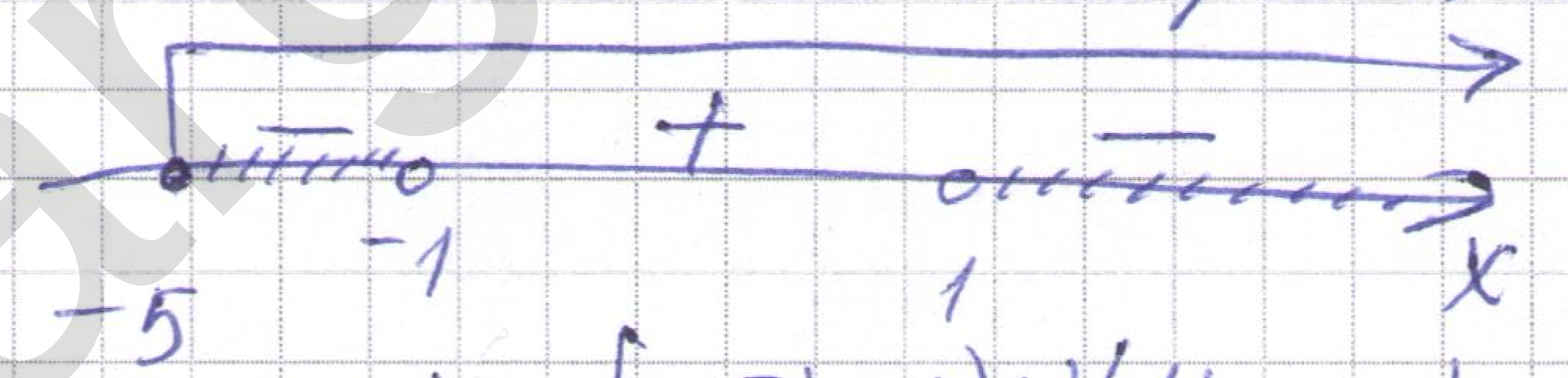
$x + 5 = 1 - 2x + x^2$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$x_1 = -1$, $x_2 = 4$ - посторонний корень.

б) $1 - x \neq 0$

$x \neq 1$



$x \in [-5; -1) \cup (1; +\infty)$

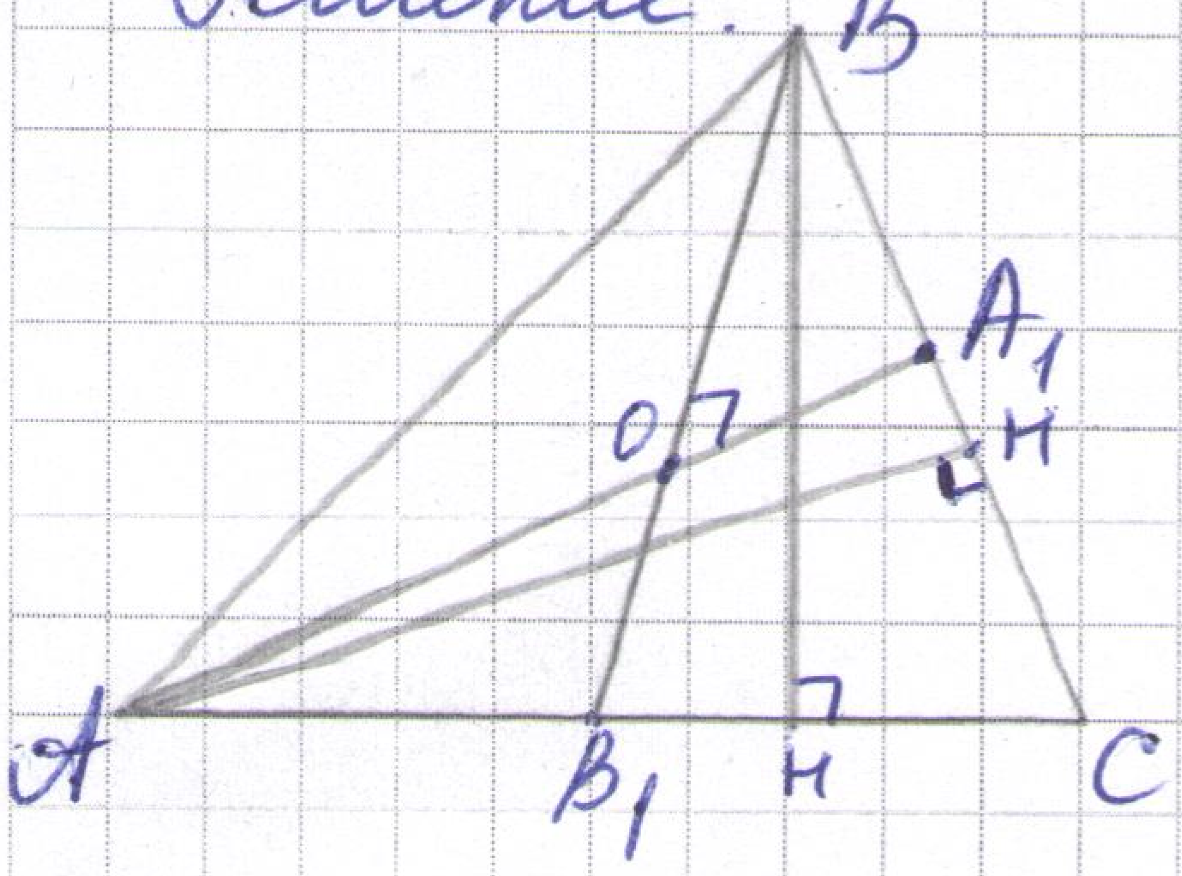
С учетом условие (*), получаем:

$x \in [-5; -1) \cup (1; +\infty)$

Ответ: $x \in [-5; -1) \cup (1; +\infty)$

№5 Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются под прямым углом. Найдите площадь треугольника ABC, если $AA_1 = 7$ и $BB_1 = 12$.

Решение.



1) Т.к. $BO = 2OB_1$; $AO = 2OA_1$ (по св-ву медиан треугольника), то

$BO = \frac{2}{3}BB_1 = \frac{2}{3}\cdot 12 = 8$

$OB_1 = \frac{1}{3}BB_1 = \frac{1}{3}\cdot 12 = 4$

$AO = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3}$

$OA_1 = \frac{1}{3}\cdot AA_1 = \frac{7}{3}$.

2) С одной стороны $S_{ABC} = \frac{1}{2}BH\cdot AC = \frac{1}{2}BH\cdot 2AB_1 = BH\cdot AB_1$, т.е. $S_{ABC} = 2S_{ABB_1}$

С другой стороны $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH\cdot BC = \frac{1}{2}AH\cdot 2A_1B = AH\cdot A_1B$, т.е. $S_{ABC} = 2S_{AA_1B}$

3). Т.к. $AA_1 \perp BB_1$ (по условию), то $S_{AA_1B_1} = \underbrace{\frac{1}{2}BO\cdot AO}_{S_{AOB}} + \underbrace{\frac{1}{2}BO\cdot OA_1}_{S_{BOA_1}} =$

$= \frac{1}{2}BO(AO + OA_1) = \frac{1}{2}BO\cdot AA_1$.

$$S_{AB_1B} = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot AO\cdot OB}_{S_{AOB}} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot AO\cdot OB_1}_{S_{AOB_1}} = \frac{1}{2}AO(BO + OB_1) = \frac{1}{2}AO\cdot BB_1$$

4). $S_{ABC} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 7 = 56$ или $S_{ABC} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{3}\cdot 12 = 56$.

Ответ. 56

№6. Дважды бросается игральный кубик. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков будет равна 7.

Решение.

Т.к. игральный кубик бросают дважды и при каждом броске возможно 6 различных исходов, то всего возможно $6 \cdot 6 = 36$ исходов.

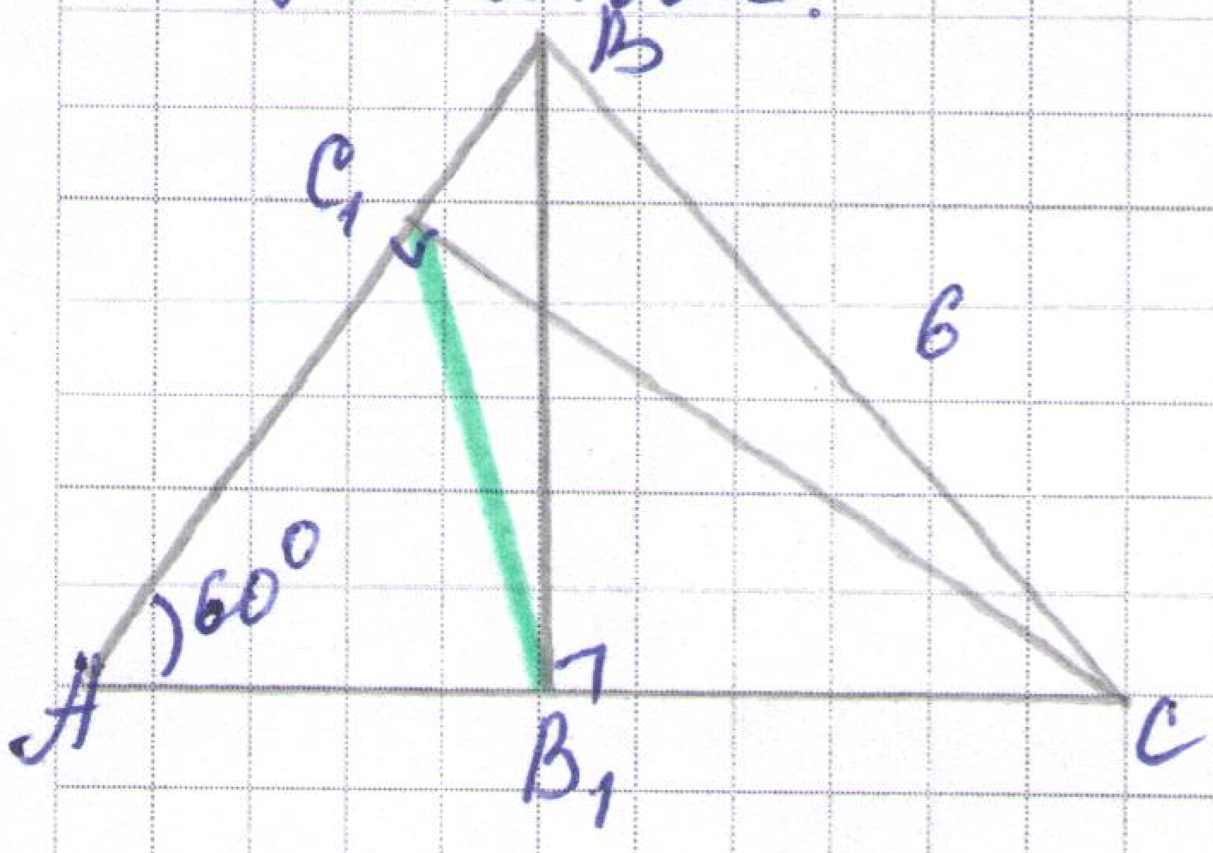
Благоприятные исходы: 1-6; 6-1; 3-4; 4-3; 5-2; 2-5 – всего 6 исходов, то вероятность того, что сумма выпавших очков будет равна 7:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Ответ: $\frac{1}{6}$

№7 В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Найдите длину отрезка B_1C_1, если $\angle A = 60^\circ$; $BC = 6$.

Решение.



1) Из $\triangle ABB_1$, $\angle B_1 = 90^\circ$, т.к. $BB_1 \perp AC$ (по условию):

$\cos A = \dfrac{AB_1}{AB}$; $\cos 60^\circ = \dfrac{AB_1}{AB}$;

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{AB_1}{AB}$

2). Из $\triangle ACC_1$; $\angle C_1 = 90^\circ$, т.к. $CC_1 \perp AB$ (по условию):

$\cos A = \dfrac{AC_1}{AC}$; $\cos 60^\circ = \dfrac{AC_1}{AC}$;

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{AC_1}{AC}$.

3) Т.о., получили: $\dfrac{AB_1}{AB} = \dfrac{AC_1}{AC} = \dfrac{1}{2}$

4) Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle AB_1C_1$: а) $\angle A$ – общий;

б) $\dfrac{AB_1}{AB} = \dfrac{1}{2}$

в) $\dfrac{AC_1}{AC} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$ (по двум пропорциональным сторонам и равному углу между ними).

Значит, $\dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{1}{2}$; $B_1C_1 = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$.

Ответ: 3.

№ 8. На детской площадке встретились мальчики и девочки. Мальчиков было больше, чем девочек, а всех детей меньше 30. Каждый мальчик подарил по цветку каждой незнакомой девочке, а каждая девочка подарила цветок каждому знакомому мальчику. Сколько было мальчиков, если всего было подарено 98 цветков?

Решение.

Пусть мальчиков было x человек, а девочек — y. Тогда, если мальчик незнаком с n девочками, то мальчик подарит n цветков, а в ответ получит $(y-n)$ цветов, т.к. $(y-n)$ девочек будут знакомы с этим мальчиком.

По условию всего было подарено 98 цветков, т.е. $x \cdot (n+y-n)=98$, т.к. $x>y$ и $x+y<30$ по условию, то $x \cdot y = 2 \cdot 7 \cdot 7 \Rightarrow$ 14 мальчиков и 7 девочек было.

Ответ: 14 мальчиков.

№9 Три числа a, в и c в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию, сумма которой равна 12. Числа a−10, в+13 и c в указанном порядке составляют арифметическую прогрессию. Чему могут быть равны числа a, в и c?

Решение.

Т.к. a, в, c...− геометрическая прогрессия (по условию), то $\frac{в}{a}=\frac{c}{в}=q \Rightarrow в=aq;\ c=вq=aq^2$.

Т.к. $a+в+c=12$ (по условию), то

$a+aq+aq^2=12;\quad 1+q+q^2=\frac{12}{a}$

Т.к. $(a-10),(в+13),c,...$ − арифметическая прогрессия (по усл.), то $в+13-(a-10)=d,\ c-(в+13)=d$, т.е.

$в+13-a+10=c-в-13$

$a-2в-36+c=0$. Т.о., получаем:

$$\begin{cases}a+в+c=12,\\ a-2в+c=36\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+q+q^2=\frac{12}{a},\\ a-2aq+aq^2=36\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}1+q+q^2=\frac{12}{a},\\ 1-2q+q^2=\frac{36}{a}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+q+q^2=\frac{12}{a};\\ \underbrace{1+q+q^2}_{\frac{12}{a}}-3q=\frac{36}{a}\end{cases} \Leftrightarrow \frac{12}{a}-3q=\frac{36}{a}$$

$-3q=\frac{24}{a};\quad q=-\frac{8}{a} \Rightarrow в=-8;\ c=\frac{64}{a}$. Т.к. $a+в+c=12$, то

$a+(-8)+\frac{64}{a}=12 \Leftrightarrow a^2-20a+64=0;\ a_1=4;\ a_2=16$

$a_{1,2}=10\pm\sqrt{100-64}=10\pm 6;$

Если $a = 4$, то $q = -2$.

Тогда $4; -8; 16$ — последовательность чисел a, b, c.

Эта последовательность является геометрической прогрессией.

Последовательность $(4-10); (-8+13); 16$ — образуют арифметическую прогрессию, т.к. $5-(-6) = 11$ и $16-5 = 11$.

$\Rightarrow a = 4;\ b = -8;\ c = 16$.

Если $a = 16$, то $q = -\frac{1}{2}$

Тогда $16; -8; 4$ — геометрическая прогрессия,

и последовательность $(16-10); (-8+13); 4$ — является арифметической прогрессией, т.к. $5-6 = -1$; $4-5 = -1$.

$\Rightarrow a = 16;\ b = -8;\ c = 4$.

Ответ: $a = 4;\ b = -8;\ c = 16$

или

$a = 16;\ b = -8;\ c = 4$.

№10. Найдите все значения y, при которых уравнение $\frac{x}{1+\frac{1}{x}} = x^2 + xy$ имеет хотя бы одно решение.

Решение.

Будем искать решения уравнения на множестве $(-\infty;-1) \cup (-1;0) \cup (0;+\infty)$ $(*)$

Выполним преобразования:

$$\frac{x}{1+\frac{1}{x}} - (x^2+xy) = 0 \Leftrightarrow \frac{x - (x^2+xy)(1+\frac{1}{x})}{\frac{x+1}{x}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x - (x^2+x+xy+y)}{\frac{x+1}{x}} = 0 \Leftrightarrow \cancel{x} - x^2 - \cancel{x} - xy - y = 0 \Leftrightarrow$$

$(**)$ $x^2+xy+y=0$ – это уравнение имеет хотя бы одно решение, если $D \geq 0$: $D = y^2 - 4y \Rightarrow y^2 - 4y \geq 0 \Leftrightarrow$

$$y(y-4) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq 0 \\ y-4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow y \geq 4 \\ \begin{cases} y \leq 0 \\ y-4 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow y \leq 0 \end{array} \right. \Rightarrow y \in (-\infty;0] \cup [4;+\infty)$$

Если $y = x$, то уравнение $(**)$ примет вид:

$x^2 + x^2 + x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(2x+1) = 0 \Rightarrow$

$x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{1}{2}$. С учетом $(*)$, получаем:

$y \in (-\infty;0) \cup [4;+\infty)$

Ответ: $y \in (-\infty;0) \cup [4;+\infty)$

№ 11.

1) Ошибка рассуждений заключается в том, что не во всякой арифметической прогрессии с положительной разностью в силу ее бесконечности обязательно встретится хотя бы один точный квадрат.

2) Следует заметить, что все точные квадраты при делении на 3 дают в остатке 0 или 1 т.к:

$$\left[\begin{array}{l} m \equiv 0 \pmod 3 \\ m \equiv 1 \pmod 3 \\ m \equiv 2 \pmod 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 \equiv 0 \pmod 3 \\ m^2 \equiv 1 \pmod 3 \\ m^2 \equiv 4 \pmod 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 \equiv 0 \pmod 3 \\ m^2 \equiv 1 \pmod 3 \end{array}\right.$$

Найдем остаток от деления числа $(3n+2000)$ на 3

$$\left[\begin{array}{l} n \equiv 0 \pmod 3 \\ n \equiv 1 \pmod 3 \\ n \equiv 2 \pmod 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3n \equiv 0 \pmod 3 \\ 3n \equiv 3 \pmod 3 \\ 3n \equiv 6 \pmod 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow 3n \equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow$$

$$3n + 2000 \equiv 2000 \pmod 3 \Leftrightarrow \underline{3n + 2000 \equiv 2 \pmod 3}$$

Получим, что число $(3n+2000)$ при делении на 3 дает в остатке 2 при любых значениях $n \in \mathbb{N}$.

Значит, $3n+2000$ не является точным квадратом для любого $n \in \mathbb{N}$, т.е. значений n не существует.

Ответ: не существует.

№12

1) Ошибка допущена в рассуждениях о том, что если последняя цифра 5, то так как первая цифра не ноль, то вычисляется количество трехзначных чисел, а не четырехзначных чисел.

2) Пусть * * * * - число, которое нужно составить из цифр 0; 1; 3; 5; 7 и кратное 5 и содержит хотя бы две одинаковые цифры.

*	*	*	*
4 способа выбрать первую цифру	5 способов выбрать вторую цифру	5 способов выбрать третью цифру	2 способа выбрать четвертую цифру
1, 3, 5, 7	0, 1, 3, 5, 7	0, 1, 3, 5, 7	0, 5

По правилу комбинаторного произведения, получаем: $4\cdot5\cdot5\cdot2 = 200$ способов.

Выясним, в скольких из них все цифры различны. Если последняя цифра 0, то первые три цифры можно выбрать $A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$ способами.

Если же последняя цифра 5, то первая цифра может быть 1; 3; 7, а вторую и третью цифры можно выбирать в каждом случае $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$ способами. Т.о., получили, что если последняя цифра 5, то $3\cdot6 = 18$ способов существует выбрать остальные 3 различные цифры на первом, втором и третьем местах.

Таким образом, искомое количество равно
200 - 24 - 18 = 158 способов.

Ответ: 158