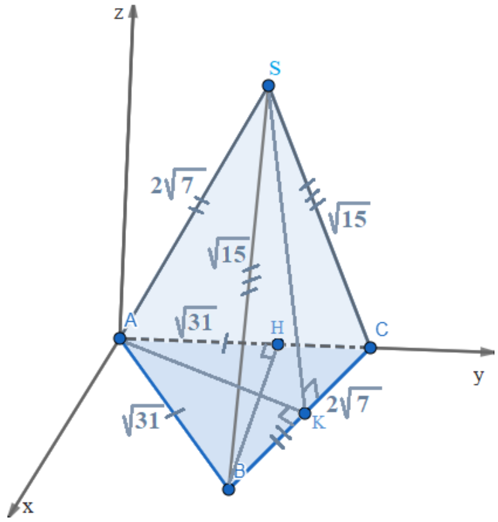
В пирамиде $SABC$ известны длины ребер $AB = AC = \sqrt{31}$, $SA = BC = 2\sqrt{7}$, $SB = SC = \sqrt{15}$.

а) Докажите, что прямая SA перпендикулярна прямой BC.

б) Найдите угол между прямой SA и плоскостью BSC.

(Математика. Подготовка к ЕГЭ, под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухов)

Решение.



Введем прямоугольную декартову систему координат с началом в точке $\boldsymbol{A}$ $(\mathbf{0}; \mathbf{0}; \mathbf{0})$, как показано на рисунке. Тогда $\boldsymbol{C}$ $(\mathbf{0};\ \sqrt{\mathbf{31}}; \mathbf{0})$

Вычислим координаты точки B.

Из равнобедренного треугольника ABC (т.к. $AB = AC$ по условию):

Так как, с одной стороны $S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot CA$, а с другой - $S_{ABC} = \frac{1}{2} AK \cdot BC$, получаем $BH \cdot CA = AK \cdot BC$,

$$BH = \frac{AK \cdot BC}{CA}.$$

$AK^2 = AB^2 - BK^2$ – по теореме Пифагора, $AK = \sqrt{31 - 7} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

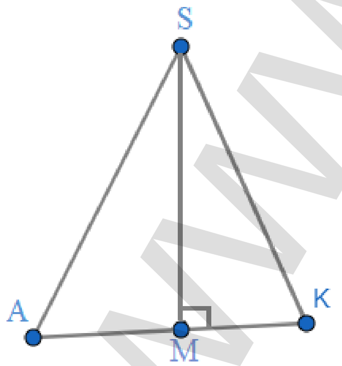
$$BH = \frac{2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{7}}{\sqrt{31}} = \frac{4\sqrt{42}}{\sqrt{31}}$$

$AH^2 = AB^2 - BH^2$ – по теореме Пифагора, $AH = \sqrt{31 - \frac{16 \cdot 42}{31}} = \frac{17}{\sqrt{31}}$.

Следовательно, $\boldsymbol{B}$ $\left(\frac{\mathbf{4}\sqrt{\mathbf{42}}}{\sqrt{\mathbf{31}}}; \frac{\mathbf{17}}{\sqrt{\mathbf{31}}}; \mathbf{0}\right)$

Вычислим координаты точки C.

Из равнобедренного треугольника SBC (т.к. $SB = SC$ по условию): $SK^2 = SB^2 - BK^2$ – по теореме Пифагора, $SK = \sqrt{15 - 7} = 2\sqrt{2}$.



Из треугольника ASK:

$AS^2 = AK^2 + SK^2 - 2AK \cdot SK \cdot cosK$ – по теореме косинусов.

$$4 \cdot 7 = 4 \cdot 6 + 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2} \cdot cosK$$

$$7 = 8 - 4\sqrt{3} \cdot cosK$$

$cosK = \frac{1}{4\sqrt{3}}$; $sinK = \frac{\sqrt{47}}{4\sqrt{3}}$ - из основного тригонометрического тождества.

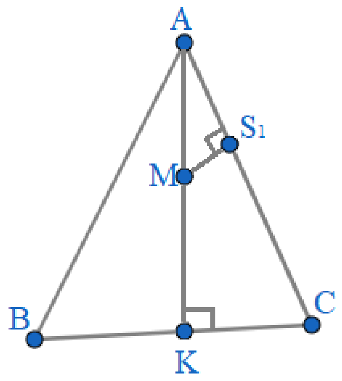
Так как, с одной стороны $S_{ASK} = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot SK \cdot sinK$, а с другой - $S_{ASK} = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot SM$, получаем $SM = SK \cdot sinK$,

$$SM = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{47}}{4\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{47}{6}}.$$

Из прямоугольного треугольника $AMS, \angle M = 90^0$:

$AM^2 = SA^2 - SM^2$ – по теореме Пифагора,

$AM = \sqrt{28 - \frac{47}{6}} = \frac{11}{\sqrt{6}}.$



Из прямоугольного треугольника $AKC, \angle K = 90^0$:

$$\sin KAC = \frac{KC}{AC} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{31}}; \quad \cos KAC = \frac{AK}{AC} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{31}}.$$

Из прямоугольного треугольника $AS_1M, \angle S_1 = 90^0$:

$$\sin MAS_1 = \frac{MS_1}{AM}; \quad \cos MAS_1 = \frac{AS_1}{AM} \Rightarrow$$

$$MS_1 = AM \cdot \sin MAS_1; AS_1 = AM \cdot \cos MAS_1$$

Так как, $\sin KAC = \sin MAS_1$ и $\cos KAC = \cos MAS_1$, то

$$MS_1 = \frac{11}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{31}}; AS_1 = \frac{11}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{31}} = \frac{22}{\sqrt{31}}.$$

Следовательно, $\boldsymbol{S}\left(\frac{\mathbf{11}\sqrt{\mathbf{7}}}{\sqrt{\mathbf{31}}\cdot\sqrt{\mathbf{6}}}; \frac{\mathbf{22}}{\sqrt{\mathbf{31}}}; \sqrt{\frac{\mathbf{47}}{\mathbf{6}}}\right)$

а) Вычислим координаты векторов $\overrightarrow{SA}$ и $\overrightarrow{BC}$, вычислим значение косинуса угла между этими векторами.

$\overrightarrow{SA}\left\{-\frac{11\sqrt{7}}{\sqrt{31}\cdot\sqrt{6}}; -\frac{22}{\sqrt{31}}; -\sqrt{\frac{47}{6}}\right\}, \overrightarrow{BC}\left\{-\frac{4\sqrt{42}}{\sqrt{31}}; \frac{14}{\sqrt{31}}; 0\right\}.$

$$\cos\left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{-\frac{11\sqrt{7}}{\sqrt{31}\cdot\sqrt{6}} \cdot \left(-\frac{4\sqrt{42}}{\sqrt{31}}\right) + \left(-\frac{22}{\sqrt{31}}\right) \cdot \frac{14}{\sqrt{31}} + 0}{\sqrt{\frac{121\cdot 7}{31\cdot 6} + \frac{484}{31} + \frac{47}{6}} \cdot \sqrt{\frac{16\cdot 42}{31} + \frac{196}{31} + 0}} =$$

$$= \frac{\frac{11\cdot 7\cdot 4}{31} - \frac{11\cdot 2\cdot 14}{31}}{\sqrt{\frac{121\cdot 7}{31\cdot 6} + \frac{484}{31} + \frac{47}{6}} \cdot \sqrt{\frac{16\cdot 42}{31} + \frac{196}{31} + 0}} = 0 \quad \Rightarrow$$

$\overrightarrow{SA} \perp \overrightarrow{BC}$, т.е. прямая SA перпендикулярна прямой BC.

б) Составим уравнение плоскости BSC:

$$\begin{vmatrix} x & y-\sqrt{31} & z \\ \frac{4\sqrt{42}}{\sqrt{31}} & -\frac{14}{\sqrt{31}} & 0 \\ \frac{11\sqrt{7}}{\sqrt{31}\sqrt{6}} & -\frac{9}{\sqrt{31}} & \frac{\sqrt{47}}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} = -\frac{14\sqrt{47}}{\sqrt{31}\cdot\sqrt{6}}x - \frac{4\sqrt{7}\cdot\sqrt{47}}{\sqrt{31}}y - \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{6}}z + 4\sqrt{7}\cdot\sqrt{47}.$$

Запишем координаты вектора $\vec{n}$ – вектора нормали к плоскости BSC:

$$\vec{n}\left\{-\frac{14\sqrt{47}}{\sqrt{31}\cdot\sqrt{6}}; -\frac{4\sqrt{7}\cdot\sqrt{47}}{\sqrt{31}}; -\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{6}}\right\};\ \overrightarrow{SA}\left\{-\frac{11\sqrt{7}}{\sqrt{31}\cdot\sqrt{6}}; -\frac{22}{\sqrt{31}}; -\sqrt{\frac{47}{6}}\right\}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{\frac{14^2\cdot 47}{31\cdot 6} + \frac{4^2\cdot 7\cdot 47}{31} + \frac{4\cdot 7}{6}} = 4\sqrt{14}$$

$$\left|\overrightarrow{SA}\right| = \sqrt{\frac{11^2\cdot 7}{31\cdot 6} + \frac{11^2\cdot 4\cdot 6}{31\cdot 6} + \frac{47}{6}} = 2\sqrt{7}$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{SA} = \frac{14\sqrt{47}}{\sqrt{31}\cdot\sqrt{6}}\cdot\frac{11\sqrt{7}}{\sqrt{31}\cdot\sqrt{6}} + \frac{4\sqrt{7}\cdot\sqrt{47}}{\sqrt{31}}\cdot\frac{22}{\sqrt{31}} + \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\frac{47}{6}} = 4\sqrt{7\cdot 47}$$

Вычислим синус угла между вектором $\vec{n}$ − вектором нормали к плоскости BSC и вектором $\overrightarrow{SA}$:

$$sin\left(\vec{n},\overrightarrow{SA}\right) = \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{SA}}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{SA}\right|} = \frac{4\sqrt{7\cdot 47}}{4\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{47}}{2\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{47}{56}}\ ;$$

$\cos(\vec{n},\overrightarrow{SA}) = \frac{3\sqrt{14}}{28}$ −из основного тригонометрического тождества.

Следовательно, угол между прямой SA и плоскостью BSC равен $arcsin\sqrt{\frac{47}{56}}$ $\left(\text{или } arccos\frac{3\sqrt{14}}{28}\right)$

Ответ. б) $\boldsymbol{arcsin\sqrt{\frac{47}{56}}}$