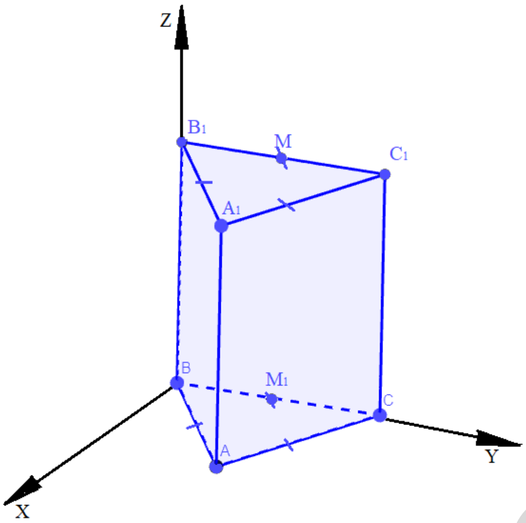
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $AB = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $AA_1 = 2\sqrt{3}$, точка M – середина ребра B_1C_1.

а) Докажите, что угол между прямыми C_1A и CM равен 60^0.

б) Найдите угол между прямой CM и плоскостью ABB_1.

(Математика. Подготовка к ЕГЭ, под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухов)

Решение.



Введем прямоугольную декартову систему координат с началом в точке $\boldsymbol{B}$ $(\mathbf{0}; \mathbf{0}; \mathbf{0})$, как показано на рисунке. Тогда $\boldsymbol{B_1}$ $(\mathbf{0}; \mathbf{0}; \mathbf{2\sqrt{3}})$, $\boldsymbol{C}$ $(\mathbf{0};\ \frac{\mathbf{12}}{\sqrt{\mathbf{13}}}; \mathbf{0})$, $\boldsymbol{C_1}(\mathbf{0};\ \frac{\mathbf{12}}{\sqrt{\mathbf{13}}}; \mathbf{2\sqrt{3}})$, $\boldsymbol{M}$ $(\mathbf{0}; \frac{\mathbf{6}}{\sqrt{\mathbf{13}}}; \mathbf{2\sqrt{3}})$,

Вычислим координаты точек A и A_1.

Так как треугольник ABC равносторонний (по условию), то AM_1 – высота, медиана и биссектриса.

Из прямоугольного треугольника $ABM_1, \angle M_1 = 90^0$:

$BM_1 = AB \cdot \cos B,\ AM_1 = AB \cdot \sin B$.

$$BM_1 = \frac{12}{\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{\sqrt{13}}, \qquad AM_1 = \frac{12}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

Следовательно, $\boldsymbol{A}$ $(\frac{\mathbf{6\sqrt{3}}}{\sqrt{\mathbf{13}}}; \frac{\mathbf{6}}{\sqrt{\mathbf{13}}}; \mathbf{0})$, $\boldsymbol{A_1}$ $(\frac{\mathbf{6\sqrt{3}}}{\sqrt{\mathbf{13}}}; \frac{\mathbf{6}}{\sqrt{\mathbf{13}}}; \mathbf{2\sqrt{3}})$

а) Вычислим координаты векторов $\overrightarrow{C_1A}$ и $\overrightarrow{CM}$, вычислим значение косинуса угла между этими векторами.

$\overrightarrow{C_1A}\left\{-\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{13}}; \frac{6}{\sqrt{13}}; 2\sqrt{3}\right\}$, $\overrightarrow{CM}\left\{0; -\frac{6}{\sqrt{13}}; 2\sqrt{3}\right\}$.

$$\cos\left(\overrightarrow{C_1A}, \overrightarrow{CM}\right) = \frac{-\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \cdot 0 + \frac{6}{\sqrt{13}} \cdot \left(-\frac{6}{\sqrt{13}}\right) + 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{36 \cdot 3}{13} + \frac{36}{13} + 4 \cdot 3} \cdot \sqrt{0 + \frac{36}{13} + 4 \cdot 3}} =$$

$$= \frac{-\frac{36}{13} + 12}{\sqrt{\frac{36 \cdot 4}{13} + 12} \cdot \sqrt{\frac{36}{13} + 12}} = \frac{12(13-3)}{13\sqrt{\frac{12(12+13)}{13}} \cdot \sqrt{\frac{12(3+13)}{13}}} = \frac{12 \cdot 10 \cdot 13}{13 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

=> угол между прямыми C_1A и CM равен 60^0.

б) Составим уравнение плоскости ABB_1:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{13}} & \frac{6}{\sqrt{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix} = \frac{6\cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}x - \frac{6\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}y.$$

Запишем координаты вектора $\vec{n}$ – вектора нормали к плоскости ABB_1:

$$\vec{n}\left\{\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{13}}; -\frac{36}{\sqrt{13}}; 0\right\};\ \overrightarrow{CM}\left\{0; -\frac{6}{\sqrt{13}}; 2\sqrt{3}\right\}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{\frac{12^2\cdot 3}{13} + \frac{36^2}{13} + 0} = \frac{24\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

$$\left|\overrightarrow{CM}\right| = \sqrt{0 + \frac{36}{13} + 12} = \frac{4\sqrt{12}}{\sqrt{13}}$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{CM} = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\cdot 0 + \left(-\frac{36}{\sqrt{13}}\right)\cdot\left(-\frac{6}{\sqrt{13}}\right) + 0\cdot 2\sqrt{3} = \frac{216}{13}$$

Вычислим синус угла между вектором $\vec{n}-$ вектором нормали к плоскости ABB_1 и вектором $\overrightarrow{CM}$:

$$\sin\left(\vec{n}, \overrightarrow{CM}\right) = \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{CM}}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{CM}\right|} = \frac{216\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}}{13\cdot 24\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{12}} = \frac{3}{8};$$

$\cos(\vec{n}, \overrightarrow{CM}) = \frac{\sqrt{55}}{8}$ –из основного тригонометрического тождества.

Следовательно, угол между прямой CM и плоскостью ABB_1 равен $arcsin\frac{3}{8}$ $\left(\text{или } arccos\frac{\sqrt{55}}{8}\right)$

Ответ. б) $\boldsymbol{arcsin\frac{3}{8}}$