Решите неравенство $log_2^2|x| - log_2\frac{x^2}{2} \geq \left(\frac{1}{2}log_2 4 + log_4|x|\right)^2$.

(Математика. Подготовка к ЕГЭ, под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова)

Решение.

Будем искать решения неравенства на множестве: $\begin{cases} |x| > 0, \\ \frac{x^2}{2} > 0. \end{cases} => x \neq 0$ (*)

В левой части неравенства для слагаемого $log_2\frac{x^2}{2}$ применим формулу

$$log_a\frac{b}{c} = log_a b - log_a c$$

и получим

$$log_2^2|x| - (log_2 x^2 - log_2 2) \geq \left(\frac{1}{2}log_2 2^2 + log_{2^2}|x|\right)^2,$$

далее в правой части неравенства вычислим $log_2 2^2$,

для слагаемого $log_{2^2}|x|$ применим формулу $log_{a^p}b = \frac{1}{p}log_a b$ и получим

$$log_2^2|x| - (2log_2|x| - 1) \geq \left(\frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}log_2|x|\right)^2$$

$$log_2^2|x| - 2log_2|x| + 1 \geq \left(1 + \frac{1}{2}log_2|x|\right)^2$$

Пусть $log_2|x| = t$, тогда $t^2 - 2t + 1 \geq \left(1 + \frac{1}{2}t\right)^2$ в правой части неравенства применим формулу сокращенного умножения $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и получим

$$t^2 - 2t + 1 \geq 1 + t + \frac{1}{4}t^2$$

$$t^2 - 2t + 1 \geq 1 + t + \frac{1}{4}t^2$$

$$\frac{3}{4}t^2 - 3t \geq 0$$

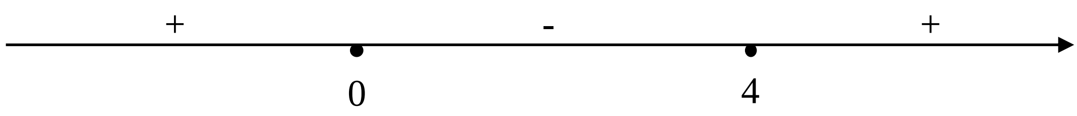
$$3t\left(\frac{1}{4}t - 1\right) \geq 0$$

Решим неравенство методом интервалов.

$t = 0$ $\qquad\qquad\qquad$ $\frac{1}{4}t - 1 = 0$

$t = 4$

Отметим эти точки на числовой прямой (точки будут «темные», «закрашенные», так как знак неравенства нестрогий: больше или равно нулю), определим знаки на каждом интервале и запишем промежутки со знаком «+».



$t \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$

Так как $t = log_2|x|$, то

$log_2|x| \leq 0$ $\qquad$ или $\qquad$ $log_2|x| \geq 4$

Т.к. $a = 2, 2 > 1,$ то функция $y = log_2 x$ монотонно возрастает, а значит

$|x| \leq 1$ $\qquad$ или $\qquad$ $|x| \geq 16$

$$\left[\begin{array}{c} x \in [-1; 1] \\ x \in (-\infty; -16] \cup [16; +\infty) \end{array}\right. => x \in (-\infty; -16] \cup [-1; 1] \cup [16; +\infty)$$

С учетом условия (*), получаем

$x \in (-\infty; -16] \cup [-1; 0) \cup (0; 1] \cup [16; +\infty)$

Ответ: $x \in (-\infty; -16] \cup [-1; 0) \cup (0; 1] \cup [16; +\infty)$