Решите неравенство

$$log_{1-\frac{1}{(x-3)^2}}\frac{x^2+5x+8}{x^2-7x+12} \leq 0.$$

(Математика. Подготовка к ЕГЭ, под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова)

Решение.

Будем искать все решения неравенства на множестве:

$$\begin{cases} \frac{x^2+5x+8}{x^2-7x+12} > 0, \\ 1-\frac{1}{(x-3)^2} \neq 1, \\ 1-\frac{1}{(x-3)^2} > 0. \end{cases} <=> \begin{cases} x \in (-\infty;3) \cup (4;+\infty), \\ x \neq 0, \\ (-\infty;2) \cup (4;+\infty). \end{cases} <=> x \in (-\infty;2) \cup (4;+\infty)\ (*)$$

Применим метод рационализации

$log_{f(x)}g(x) \leq 0 <=> (f(x)-1)(g(x)-1) \leq 0$ и получим

$$\left(1-\frac{1}{(x-3)^2}-1\right)\left(\frac{x^2+5x+8}{x^2-7x+12}-1\right) \leq 0$$

$$\left(-\frac{1}{(x-3)^2}\right)\left(\frac{x^2+5x+8-x^2+7x-12}{x^2-7x+12}\right) \leq 0$$

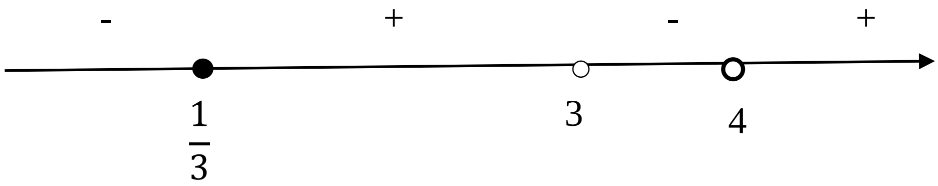
$$\frac{1}{(x-3)^2} \cdot \frac{12x-4}{(x-3)(x-4)} \geq 0$$

$$\frac{4(3x-1)}{(x-3)^3(x-4)} \geq 0$$

Решим неравенство методом интервалов. Найдем значения x при которых числитель данной дроби обращается в ноль и значения x при которых знаменатель данной дроби не обращается в ноль:

$x = \frac{1}{3}$ $\qquad x \neq 3$ $\qquad x \neq 4$

Отметим эти точки на числовой прямой (точка $x = \frac{1}{3}$ будет «темной», «закрашенной», так как знак неравенства нестрогий: меньше или равно нулю, а точки $x \neq 3$ и $x \neq 4$ будут «светлыми», «выколотыми», так как при этих значениях переменной знаменатель дроби обращается в ноль), определим знаки на каждом интервале и запишем промежутки со знаком «+».



$x \in \left[\frac{1}{3}; 3\right) \cup (4; +\infty)$

С учетом условия (*), получаем

$x \in \left[\frac{1}{3}; 2\right) \cup (4; +\infty)$

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{3}; 2\right) \cup (4; +\infty)$